РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

11.1. (Дидин М.) **1.** На цилиндр действуют силы тяжести, реакции опоры и трения. Поскольку цилиндр вернулся в исходное положение, сила трения направлена вверх вдоль наклонной плоскости. Это значит, что цилиндр вращается по часовой стрелке. Сначала цилиндр начнёт скользить вниз с ускорением $a_1 = g\sin\varphi$. На границе с шероховатой поверхностью скорость цилиндра достигнет $v_0 = \sqrt{2gh}$. При дальнейшем движении цилиндра вниз не него начнёт действовать сила трения $F_{тр} = \mu g\cos\varphi$, направленная вверх. (Если на шероховатой поверхности цилиндр перестанет вращаться по часовой стрелке, он покатится вниз, т.е. не вернётся в исходную тоску). При качении цилиндра вверх сила трения не превосходит $\mu g\cos\varphi$, а ускорение a_2 при подъёме не больше, чем ускорение при спуске. Значит, скорость на границе не больше v_0, и в точке старта цилиндр остановится (прекратит движение вверх, но может продолжать вращаться). Ускорение цилиндра на шероховатой поверхности постоянно и равно $a_2 = g(\mu\cos\varphi - \sin\varphi)$. Время подъёма:

$$t = \frac{2v_0}{g}\left(\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{1}{\mu\cos\varphi - \sin\varphi}\right)$$

$$f(\varphi) = \frac{1}{\sin\varphi} + \frac{1}{\mu\cos\varphi - \sin\varphi} = \frac{\mu\cos\varphi}{\sin\varphi(\mu\cos\varphi - \sin\varphi)}$$

$$f_1(\varphi) = \mathrm{tg}\varphi(\mu\cos\varphi - \sin\varphi)$$

$$\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi}(\mu\cos\varphi - \sin\varphi) - \mathrm{tg}\varphi(\mu\sin\varphi + \cos\varphi) = 0$$

$$\mu\cos^2\varphi = \sin\varphi\left(\frac{1}{\cos\varphi} + \cos\varphi\right)$$

$$\sin\varphi = \mu\frac{\cos^3\varphi}{1+\cos^2\varphi} < \mu\cos^3\varphi < \mu$$

Так как $\mu = 0{,}1$, $\varphi << 1$, тогда $\cos\varphi = 1$ и $\sin\varphi = \varphi = 0{,}05$.

Так как $h = 0{,}1$ м, $v_0 = \sqrt{2gh} = 1{,}4$ м/с.

Получаем, что $t_{\min} = 11{,}3$ с. Запишем уравнение движения и основное уравнение динамики относительно центра цилиндра:

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha \\ mr^2\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\mu mgr\cos\alpha \end{cases}$$

Разделим одно одно уравнение на другое:

$$\frac{\mathrm{d}v}{r\mathrm{d}\omega}=\frac{\mu\cos\varphi-\sin\varphi}{-\mu\cos\varphi}=\frac{\mu-\frac{\mu}{2}}{-\mu}=-\frac{1}{2}$$

Изменение скорости между двумя последовательными прохождениями линии раздела наклонной плоскости $\Delta v = 2v_0$.

При минимальной возможной угловой скорости проскальзывание прекращается ровно на линии раздела плоскости:

$$\Delta\omega=\frac{v_0}{R}-\omega_0$$

Откуда получаем, что

$$\omega_0=\frac{5v_0}{R}=\frac{5\sqrt{2gh}}{R}=140\ \text{с}^{-1}$$

11.2. (Воробьев И.) **Способ 1**

Рассмотрим преобразование плоскости pV состоящее из сжатия в k раз по оси p и такого же растяжения по оси V. При этом преобразовании сохраняются площади всех фигур, а поэтому сохраняются температуры ($T = pV/R$), работы ($\mathrm{d}A = p\mathrm{d}V$) и теплоемкости ($C = dQ/dT = dU/dT + dA$). По точке A определяем $k = 2$ и строим график второго процесса: отрезок из точки (2; 3,5) в точку (16; 7). Вне этого интервала восстановить второй процесс невозможно.

Способ 2

Из первого начала термодинамики имеем для теплоёмкости: $C = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}T = \mathrm{d}U/\mathrm{d}T + p\mathrm{d}V/\mathrm{d}T$.

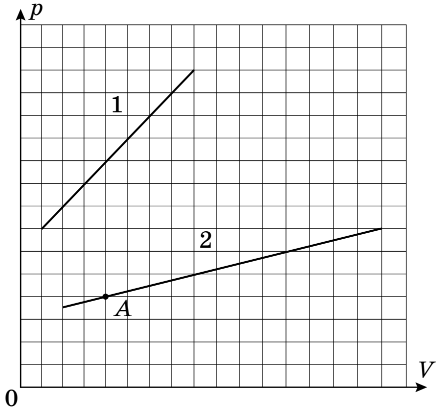
Так как внутренняя энергия $U = vC_V T$, а давление $p = vRT/V$, то $C = vC_V + (vRT/V)\mathrm{d}V/\mathrm{d}T$.

Пусть $V_1(T)$ и $V_2(T)$ объёмы при температуре T для процессов 1 и 2. Из совпадения теплоёмкостей имеем $\mathrm{d}V_2/V_2 = \mathrm{d}V_1/V_1$ при одинаковых T и $\mathrm{d}T$, а тогда $(V_2 + \mathrm{d}V_2)/(V_1 + \mathrm{d}V_1) = V_2/V_2$. Отношение объёмов при температуре $T + \mathrm{d}T$ равно отношению объёмов при температуре T, а то есть отношение одинаково при любых температурах и $V_2(T) = kV_1(T)$, где k константа.

При одинаковой температуре $p_2V_2 = p_1V_1$, тогда отношение давлений при одинаковой температуре $p_2/p_1 = 1/k$.

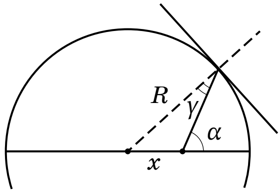
В точке A $p_AV_A = 16$ условных единиц (одна клеточка по горизонтали единица объёма, а по вертикали – единица давления). При той же температуре для первого процесса тогда $p_1V_1 = 16$, зависимость же давления от объёма, заданная отрезком прямой, $p_1 = 6 + V_1$. Откуда получим уравнение для V_I, отвечающего температуре в точке A: $(6 + V_1)V_1 = 16$. Выбираем положительный корень $V_1 = 2$. Откуда находим $k = V_A/V_1 = 2$.

Наклон графика второго процесса $\mathrm{d}p_2/\mathrm{d}V_2 = (\mathrm{d}p_1/\mathrm{d}V_1)k^2 = 0{,}25$ оказывается постоянным. Из принадлежности графику точки A получим зависимость давления от объёма для второго процесса: $p_2 = 3 + V_2/4$ и соответственно прямолинейный график.



Для первого процесса за пределами уцелевшего отрезка возможно иная зависимость давления от объёма. Тогда график второго процесса однозначно восстановим лишь в пределах, отвечающих начальной $V_1 = 1$; $p_1 = 7$ и конечной точкам $V_1 = 8$; $p_1 = 14$ уцелевшего отрезка. По найденному выше коэффициенту $k = 2$ для графика второго процесса в начальной точке имеем $V_2 = 2$; $p_2 = 3{,}5$, а в конечной $V_2 = 16$; $p_2 = 7$. На рисунке выше приведён восстановленный в этих пределах график второго процесса.

11.3. (Кутелев К.) Видимость для наблюдателя, находящегося внутри планеты ограничена эффектом полного отражения. Отметим, что наблюдатель может не видеть только близкие к планете объекты.



Угол падения на поверхность планеты γ можно связать с углом α с помощью теоремы синусов:

$$\frac{R}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{x}{\sin\gamma}.$$

Для данного положения x максимальный угол падения достигается при $\alpha = 90^\circ$: $\sin\gamma_{\max} = \dfrac{x}{R}$.

Полное внутреннее отражение появится на дальности x, для которой выполнится условие $n\sin(\gamma_{\max}) = 1$.

Это позволяет найти радиус планеты $R = xn$.

Спутник массой m движется по самой низкой орбите радиуса R с первой космической скоростью:

$$\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2} \quad v = \sqrt{G\frac{M}{R}}.$$

Подставляя радиус, получаем:

$$v = xn\sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho} = 2{,}1\ \text{км/с}.$$

11.4. (Аполонский А.) При движении перемычки в магнитном поле между ее сторонами, скользящими по направляющим возникает ЭДС равная $\varepsilon_{\text{и}} = Bvl$, где v – скорость перемычки. Изменение скорости перемычки происходит из-за воздействия на нее силы Ампера равной $F_{\text{а}} = IBl$ при протекающем через нее токе I. Тот же ток заряжает или разряжает конденсатор (в зависимосте от направления движения перемычки).

Второй закон Ньютона для перемычки:

$$ma = IBl$$

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = IBl$$

$m\Delta v = I\Delta tBl = -\Delta qBl$, где Δq – изменение заряда конденсатора.

При разгоне перемычки от нулевой скорости до v_1:

$$\Delta v = v_1 = \frac{-\Delta qBl}{m} = \frac{(CU_0 - q)Bl}{m}$$

$$q = CBv_1 l$$

Тогда:

$$v_1 = \frac{C(U_0 - Bv_1 l)Bl}{m} = \frac{CU_0Bl}{m\left(1 + \frac{B^2l^2C}{m}\right)}$$

Рассмотрим n-ое столкновение со стенкой. Перемычка налетает со скоростью v_{n}. Заряд на конденсаторе при этом равен $q_{\text{n}} = CBlv_{\text{n}}$.

После стокновения перемычка движется в противоположном направлении с той же скоростью v_{n}, соответствующей теперь противоположному знаку заряда конденсатора.

Изменение скорости перемычки в процессе перезарядки:

$$v_{\text{n}} - v_{\text{n}+1} = \frac{(q_{\text{n}} + q_{\text{n}+1})Bl}{m}.$$

Здесь $v_{\text{n}+1}$ и $q_{\text{n}+1}$ – модули скорости и заряда конденсатора при установлении соответствия между ЭДС индукции и напряжением на конденсаторе после столкновения. При этом учтено, что знак заряда конденсатора изменился и $\Delta q = q_{\text{n}} + q_{\text{n}+1}$.

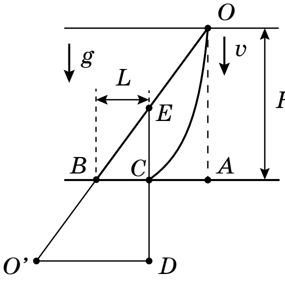
$$v_{\text{n}} - v_{\text{n}+1} = \frac{(v_{\text{n}} + v_{\text{n}+1})B^2l^2C}{m}$$

Отсюда:

$$v_{n+1} = v_n \frac{1 - \dfrac{B^2 l^2 C}{m}}{1 + \dfrac{B^2 l^2 C}{m}}$$

После n столкновений скорость равна:

$$v_{n+1} = v_1 \left(\frac{1 - \dfrac{B^2 l^2 C}{m}}{1 + \dfrac{B^2 l^2 C}{m}} \right)^n = \frac{CU_0 Bl}{m} \frac{\left(1 - \dfrac{B^2 l^2 C}{m}\right)^n}{\left(1 + \dfrac{B^2 l^2 C}{m}\right)^{n+1}}$$



11.5. (Аполонский А.) **Способ 1**

Перейдем в инерциальную систему отсчета, двигающуюся со скоростью (w_x, w_y), с которой двигался бы шарик через большое время (установившаяся скорость ,если бы не дно). Поместим начало этой системы в точку O в момент бросания. В этой системе отсчета река не движется вдоль оси OX, а движение реки вдоль оси OY компенсирует силу тяжести, поэтому полная сила (в данной СО), действующая на камешек, прямо пропорциональна скорости: $\vec{a} = -k\vec{u}$, где u –скорость шарика в этой СО. Поэтому движение в ней происходит по прямой, а изменение скорости пропорционально смещению в этой же системе отсчета с тем же коэффициентом. Значение коэффициента k находится из начальных условий вертикальная компонента ускорения при бросании без начальной скорости $g = kw_y$. В момент падения второго шарика в точку C, начало отсчета находится в точке O' (см. рис). Рассмотрим точку E, в которой будет первый шарик через то время, за которое второй шарик падает на дно. Она находится над точкой C, так как проекции начальных скоростей на OX одинаковы. $\triangle EBC \propto \triangle EO'D$, поэтому $O'D = Lw_y/v$. Горизонтальная скорость в момент падения:

$$w = k \cdot O'D = \frac{g}{w_y} \frac{Lw_y}{v} = \frac{gL}{v}.$$

Способ 2

Ось OX сонаправлена со скоростью реки, а ось OY направлена вертикально вниз.

Введем обозначения w_x – скорость течения реки, $w_y = g/k$. Тогда:

$$\begin{cases} \dot{v}_x = -kv_x + kw_x \\ \dot{v}_y = -kv_y + kw_y \end{cases}$$

Уравнения без индекса выполнены для обеих проекций:

$$\frac{\mathrm{d}v}{v-w} = -k\mathrm{d}t \text{ , следоваетельно}$$

$$v = w + (v_0 - w)\mathrm{e}^{-kt} = w(1-\mathrm{e}^{-kt}) + v_0\mathrm{e}^{-kt}$$

Введем обозначение:

$$f(t) = \int_0^t (1-\mathrm{e}^{-kt'})\mathrm{d}t' .$$

Тогда смещение по оси OX равно:

$$\Delta x_1 = \int_0^{t_1} v_x \mathrm{d}t = w_x f(t_1)$$

$$\Delta y_1 = \int_0^{t_1} v_y \mathrm{d}t = w_y f(t_1) = H ,$$

где H – глубина реки.
Во втором случае время падения равно t_2:

$$\Delta x_2 = \int_0^{t_2} v_x \mathrm{d}t = w_x f(t_2) = \Delta x_1 - L$$

$$\Delta y_2 = \int_0^{t_2} v_y \mathrm{d}t = w_y f(t_2) + v\int_0^{t_2} \mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t = w_y f(t_2) + \frac{v}{k}(1-\mathrm{e}^{-kt_2}) = H .$$

Вычитая попарно уравнения, записанные для разных осей получаем:

$$\begin{cases} w_x(f(t_1)-f(t_2)) = L \\ w_y(f(t_1)-f(t_2)) - \dfrac{v}{k}(1-\mathrm{e}^{-kt_2}) = 0 \end{cases}$$

Замечая, что искомая скорость w равна:

$$w = w_x(1-\mathrm{e}^{-kt_2}) = \frac{kLw_y}{v} = \frac{gL}{v} .$$